RENCONTRE

Les mathématiques, une philosophie pour comprendre le monde

Rencontre avec le mathématicien **Étienne Ghys,** secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences depuis janvier 2019. Directeur de recherche au CNRS, il a contribué à la création et au développement du laboratoire de mathématiques de l'ENS de Lyon.

Le centre EPS et société défend une conception de l'éducation physique et sportive basée sur l'appropriation d'une culture, plus précisément celle des activités physiques, sportives et artistiques. Cette conception se heurte à celle de l'institution qui défend l'idée d'une EPS uniquement contributive à des questions de société plus générales (sédentarité, santé, préparation à la salle de musculation…) et qui, pour cela, minimise les savoirs cultuels à acquérir. Cette visée très utilitaire de l'école est celle des défenseurs de «l'école du socle». Ils défendent une légitimité de l'école dans un rapport pratique des savoirs scolaires et limitent les savoirs à acquérir pour tous. Pourquoi enseigner la géométrie ou l'algèbre et pas simplement les 4 opérations, puisque ça ne «sert» à rien.

Que répondez-vous lorsqu'on vous pose la question «à quoi servent les savoirs mathématiques parfois complexes qui sont étudiés à l'école?» Par exemple en géométrie, de façon très provocatrice, ne pourrions-nous pas nous limiter à quelques formes (rond, carré…) sans étudier des théories qui semblent inutiles?

Le mot «géométrie» rappelle de vagues souvenirs du collège, faits de triangles, de cercles, et de théorèmes comme celui de Pythagore, dont on ne se souvient plus trop ni de l'énoncé ni de son utilité, et encore moins de sa démonstration. Mais je voudrais évoquer 2 moments de rupture dans cette histoire. Vous pourrez en lire deux autres sur un article que j'ai publié récemment dans l'Humanité Dimanche. Ces moments magiques dans l'histoire des savoirs, qui font la joie des mathématiciens.

Raisonner!

La première rupture fait partie du miracle de la pensée philosophique de l'Antiquité grecque. Auparavant, par exemple chez les Égyptiens de l'Antiquité, les géomètres étaient des arpenteurs qui mesuraient des superficies. D'ailleurs, l'étymologie de «géo-métrie» nous le dit: il s'agit tout simplement de mesurer la Terre. Un livre, écrit par Euclide trois siècles avant notre ère et intitulé «les Éléments», changea complètement la perspective. Euclide y inventait la méthode axiomatique.
Un certain nombre d'affirmations sont déclarées «vraies» –on les appelle des axiomes– et ensuite le rôle du géomètre consiste à en tirer toutes les conséquences en se servant uniquement de la logique. Euclide ne se soucie guère de l'arpentage. Il est intéressé avant tout par le raisonnement, la déduction, la démonstration. Les conséquences de ce livre seront considérables, bien au-delà des mathématiques: il sera une étape cruciale dans le développement ultérieur de la méthode scientifique. Lire «les Éléments», c'est tout simplement apprendre à raisonner.
La géométrie est devenue un langage abstrait qui aide à comprendre l'Univers, comme l'écrivait si bien Galilée en 1623: «La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance dans un labyrinthe obscur.»
C'est d'ailleurs pour apprendre à raisonner que les enfants sont soumis depuis des siècles à l'apprentissage de la géométrie à l'école. Aujourd'hui, alors que les programmes scolaires laissent une place de plus en plus petite à la science, allons-nous laisser nos enfants errer dans un labyrinthe obscur?

Le mariage surprenant de l'algèbre et de la géométrie, la carpe et le lapin.

Une deuxième rupture est française! Il s'agit d'un autre livre majeur intitulé «la Géométrie» et écrit par René Descartes en 1637. On pourrait penser qu'il s'agit d'une découverte sans importance: la position d'un point dans le plan est décrite par deux nombres – ses coordonnées – qu'on appelle aujourd'hui l'abscisse et l'ordonnée, et qu'on note en général x et y. On apprend au collège à tracer les deux

«Aujourd'hui, alors que les programmes scolaires laissent une place de plus en plus petite à la science, allons-nous laisser nos enfants errer dans un labyrinthe obscur?»

DR

PAULETTE BRISSET

axes de « coordonnées cartésiennes », en l'honneur de Descartes. Dans l'espace, il faut trois nombres, x, y et z. La perception de l'espace que nous partageons, tout au moins dans notre culture occidentale, est profondément imprégnée par ce point de vue. Lorsque nous consultons une carte de géographie ou lorsque nous pensons à l'espace qui nous entoure, nous le faisons en termes de coordonnées, même si ce processus mental est souvent inconscient – qu'on le veuille ou non, nous sommes cartésiens. Comme un point a deux coordonnées x, y, une courbe peut être décrite par une certaine relation entre ces coordonnées. Par exemple, on apprend à l'école qu'une droite est décrite par une équation de la forme $y = ax + b$. C'est le début de la « géométrie algébrique », qui relie des objets géométriques, comme une droite, et des objets algébriques, comme une équation.
Là encore, les conséquences de cette algébrisation de la géométrie seront immenses. Les scientifiques seront tentés de mettre l'Univers en équations et cela contribuera largement à l'explosion de la science au siècle des Lumières. Il leur faudra un peu plus de temps pour comprendre que la résolution de ces équations n'est pas toujours facile et parfois même impossible.

Vous faites la démonstration que les savoirs mathématiques nous permettent d'éclairer notre rapport au monde. Vos deux exemples sont éclairants dans l'épistémologie des savoirs et donnent tout son sens à l'étude des savoirs dans les classes. Pourriez-vous nous donner un autre exemple de mathématiciens qui ont expliqué notre rapport au monde ?

De ce point de vue, l'un de mes héros scientifiques, Henri Poincaré, a écrit des livres de philosophie des mathématiques. Ses travaux sont aujourd'hui corroborés par des neurobiologistes, comme par exemple Alain Berthoz qui montre par l'étude du cerveau la validité de ces théories, par exemple sur le rôle du mouvement dans la géométrie. (*Lire à ce sujet l'article d'Alain Berthoz dans le numéro de contrepied sur la course d'orientation).*
Dans un chapitre intitulé « pourquoi l'espace a trois dimensions », il explique que l'espace géométrique qu'on apprend à l'école, avec ses 2 ou 3 coordonnées, n'a rien à voir avec la façon dont les êtres humains le perçoivent. Par exemple l'espace n'est pas uniquement visuel car on le voit avec les yeux, on l'entend avec nos oreilles, on le touche avec nos mains. Tous ces espaces, ont des natures différentes, et pourtant notre cerveau a la capacité d'exploiter ces nombreux espaces qui n'ont rien à voir entre eux, pour créer un espace euclidien de dimension 3 dans lequel nous faisons de la géométrie.
Pourquoi notre espace a trois dimensions alors que ce qui arrive au fond de l'œil n'en a que deux : la rétine est une surface.

« L'important n'est pas de savoir pour savoir… L'important est de relier ce savoir à la capacité de comprendre. »

Comment puis-je percevoir la profondeur, la troisième dimension ? Je la perçois d'une part avec ma vision binoculaire qui me permet d'estimer la distance d'un objet et d'autre part par l'accommodation du cristallin qui me donne une autre sensation de la profondeur. Notre perception de l'espace ne donne pas le même statut à cette troisième dimension qu'aux deux autres. Deux d'entre elles sont localisées sur ma rétine et la 3e est la conséquence de l'accommodation de mon œil. Pourtant dans la géométrie dans l'espace qu'on apprend à l'école, les trois dimensions sont « les mêmes » (on parle d'isotropie).
Par quel processus les humains ont-ils construit cet espace complément abstrait dans lequel on fait de la géométrie, avec par exemple des cercles, des sphères ? Poincaré explique que l'espace que nous construisons est lié à notre corps et à notre capacité de nous mouvoir.
Imaginons un oiseau qui vole dans le ciel. Comment le cerveau comprend-il que cet oiseau se déplace par rapport à nous ? Le cerveau sait, par expérience, qu'en bougeant la tête d'une certaine manière, il va compenser ce mouvement et l'oiseau ne paraitra plus en mouvement. Poincaré affirme que l'espace n'existe pas en soi mais à travers les mouvements que nous faisons pour y accéder. Par exemple une bouteille face à moi existe car j'ai appris dans une expérience antérieure qu'en déplaçant ma main, je pouvais la saisir. Pour Poincaré, l'espace n'est autre que le mouvement. Ce n'est qu'à travers l'expérience musculaire que l'espace existe.
Cette construction de l'espace par notre cerveau ne peut se faire que parce que certains objets sont solides. Comment puis-je savoir que ce téléphone portable, posé loin devant moi, est un rectangle, alors que je ne le vois qu'en perspective, et qu'il ne m'apparaît pas comme un rectangle ? Je sais par expérience que si je me lève et que je me place directement en face de cet objet, je vais percevoir cette forme rectangulaire. Je ne pense à ce rectangle qu'à travers l'imagination que j'ai du mouvement que je vais faire pour voir un rectangle.

Dans les exemples que vous donnez, vous faites la démonstration qu'il y aurait dans la culture mathématique, un savoir qui dépasserait ce propre savoir lié à l'objet et qui permettrait d'acquérir des capacités d'ordre plus général, que l'on pourrait relier à ce que les anglo-saxons nomment les soft skill (compétences méthodologiques).

Prenons l'exemple du théorème de Pythagore, qui affirme que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. Cet énoncé du savoir isolé ne m'intéresse pas en soi et un citoyen peut tout à fait vivre sans ce savoir. En revanche, un professeur peut démontrer à un élève ce théorème : expliquer pourquoi il est vrai. L'élève a alors (si tout va bien) une révélation face à cette vérité qu'il ne pourra plus nier. Un élève peut mettre en doute beaucoup des choses qu'on lui apprend à l'école et on voit beaucoup de dérives : les fameuses « théories du complot ». Mais un théorème démontré devient un fait indiscutable.
C'est cette compréhension qui transcende l'énoncé du théorème : le fait d'accéder à la vérité par une méthode qui dépasse le contenu qui est pour moi déterminante. Ce qui m'intéresse c'est que les mathématiques me permettent d'avoir une clé d'accès à la connaissance. L'important n'est pas de savoir pour savoir… L'important est de relier ce savoir à la capacité de comprendre.
Il me semble que l'un des rôles principaux de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre aux élèves à distinguer une vérité indiscutable d'un point de vue, d'une opinion, ou d'une croyance. Nous pouvons avoir des idées qui divergent sur ceci ou sur cela, mais les mathématiques sont l'un des moyens de nous accorder sur un certain nombre de vérités indiscutables. *Un antidote au dogmatisme*, dont nous avons bien besoin en ce moment. Les programmes de mathématiques actuels ont supprimé presque toutes les démonstrations. Selon moi, le théorème de Pythagore, sans une démonstration n'a pas d'intérêt au collège. Par exemple, aujourd'hui dans les médias on ne cesse d'assister à des confusions entre cause et conséquence, entre corrélation et causalité. Le travail mathématique permet de donner des clés, de logique élémentaire, pour ne pas se laisser abuser par ces pseudo-vérités.

> « Ce n'est qu'à travers l'expérience musculaire que l'espace existe. »

En math comme en EPS, il y a des techniques pour résoudre des problèmes. Nous insistons dans le monde de l'EPS pour relier l'apprentissage des techniques au problème qu'elles résolvent pour qu'elles prennent tout leur sens. Dans l'apprentissage des mathématiques, faut-il apprendre des techniques ?

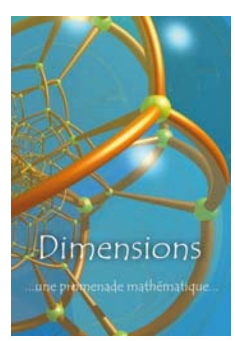
Souvent, les enfants (et les adultes) font des choses sans les comprendre. C'est bien normal, il est nécessaire de savoir des choses par cœur, des recettes, des techniques. Mais lorsque vous regardez les manuels scolaires aujourd'hui, ils ne donnent pas vraiment d'appétence pour les maths. Il ne reste bien souvent que des recettes et les concepts ont disparu. Les démonstrations ne sont plus faites et on ne demande aux élèves que d'appliquer des règles.

Pourquoi le niveau des élèves en math est faible ?

Nous sommes une discipline qui s'enseigne dès le début de la scolarité avec une idée ancrée que ce savoir est cumulatif. L'enseignement n'est pas suffisamment pensé de façon spiralaire qui permettrait de revenir sur une notion sur laquelle nous aurions trébuché dans la classe précédente avec une approche différente.
De nombreuses personnes évoquent une souffrance dans les cours de maths qu'ils ont subi depuis le CP. Il faut bien entendu s'interroger sur la formation des enseignants. D'ailleurs le rapport de Villani Torossian « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » propose d'insister davantage sur la formation des enseignants ainsi que sur l'histoire des sciences et l'épistémologie
Il faut aussi prendre en compte le fait que les élèves commencent les mathématiques avec les professeurs des écoles, qui pour 80% d'entre eux ont eu une formation littéraire et qui ont parfois un rapport douloureux aux mathématiques. Il serait nécessaire qu'ils vivent pendant leur formation un rapport plus positif aux mathématiques. Tout cela n'est pas facile à réaliser !♦ **Entretien réalisé par B. Cremonesi**

Le site de l'Académie des sciences : www.academie-sciences.fr

« Dimensions. Une promenade mathématique » : un film pour tout public. 9 chapitres, 2 heures de maths pour découvrir progressivement la géométrie de la quatrième dimension ; par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez : http://www.dimensions- math.org



Rapport Villani Torossian 21 mesures pour enseignement des mathematiques

« L'Héritage scientifique de Poincaré », Éric Charpentier, Étienne Ghys, Annick Lesne (dir.), Belin, 2006.